

03 Nombres entiers et fractions

03-01 Multiples et diviseurs

Définitions

Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.

Dans la division euclidienne de a par b , lorsque le reste est égal à 0 alors on dit que :

- a est divisible par b
- b est un diviseur de a
- a est un multiple de b

Exemples

- On a $20 = 7 \times 2 + 6$.
Comme le reste de la division euclidienne de 20 par 7 vaut 6, alors 20 n'est pas divisible par 7.
- On a $21 = 7 \times 3 + 0$.
Comme le reste de la division euclidienne de 21 par 7 vaut 0, alors 21 est divisible par 7.

Propriétés

Sans calcul, il est possible de deviner certains diviseurs d'un nombre grâce aux critères de divisibilité.

- Critère de divisibilité par 2 : le dernier chiffre du nombre est pair.
- Critère de divisibilité par 5 : le dernier chiffre du nombre est 0 ou 5.
- Critère de divisibilité par 10 : le dernier chiffre du nombre est 0.
- Critère de divisibilité par 4 : les deux derniers chiffres du nombre forment un multiple de 4.
- Critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres du nombre est un multiple de 3.
- Critère de divisibilité par 9 : la somme des chiffres du nombre est un multiple de 9.

Exemple

On considère le nombre 16 170.

- Le dernier chiffre est pair donc 16 170 est divisible par 2.
- Le dernier chiffre est 0 ou 5 donc 16 170 est divisible par 5.
- Le dernier chiffre est 0 donc 16 170 est divisible par 10.
- Les deux derniers chiffres forment 70 (non divisible par 4) donc 16 170 n'est pas divisible par 4.
- La somme des chiffres vaut 15 (divisible par 3) donc 16 170 est divisible par 3.
- La somme des chiffres vaut 15 (non divisible par 9) donc 16 170 n'est pas divisible par 9.
- Critère bonus : comme 16 170 est divisible par 2 et par 3 alors 16 170 est divisible par 6.

03 Nombres entiers et fractions

03-01 Multiples et diviseurs**Définitions**

Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.

Dans la division euclidienne de a par b , lorsque le reste est égal à 0 alors on dit que :

- a est divisible par b
- b est un diviseur de a
- a est un multiple de b

Exemples

- On a $20 = 7 \times \dots + \dots$
Comme le reste de la division euclidienne de 20 par $\dots$ vaut $\dots$, alors 20 $\dots$ divisible par 7.
- On a $21 = 7 \times \dots + \dots$
Comme le reste de la division euclidienne de 21 par $\dots$ vaut $\dots$, alors 21 $\dots$ divisible par 7.

Propriétés

Sans calcul, il est possible de deviner certains diviseurs d'un nombre grâce aux critères de divisibilité.

- Critère de divisibilité par 2 : le dernier chiffre du nombre est pair.
- Critère de divisibilité par 5 : le dernier chiffre du nombre est 0 ou 5.
- Critère de divisibilité par 10 : le dernier chiffre du nombre est 0.
- Critère de divisibilité par 4 : les deux derniers chiffres du nombre forment un multiple de 4.
- Critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres du nombre est un multiple de 3.
- Critère de divisibilité par 9 : la somme des chiffres du nombre est un multiple de 9.

Exemple

On considère le nombre 16 170.

- Le $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 2.
- Le $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 5.
- Le $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 10.
- Les $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 4.
- La $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 3.
- La $\dots$ donc 16 170 $\dots$ divisible par 9.
- Critère bonus : comme 16 170 est divisible par 2 et par 3 alors 16 170 $\dots$ divisible par 6.

03-01 Jeu de Juniper Green**Règle pour 1 joueur**

Entourer un nombre pair dans la grille puis entourer un nombre qui est soit un multiple soit un diviseur du précédent. Continuer ainsi jusqu'à être bloqué. On ne peut entourer chaque nombre qu'une seule fois.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Règle pour 2 joueurs

Le premier joueur entoure un nombre pair puis chaque joueur barre un nombre à tour de rôle en respectant la règle suivante : on ne peut barrer un nombre que s'il est multiple ou diviseur du nombre barré juste avant lui. Le joueur qui ne peut pas jouer a perdu.

03-02 Les nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

Les 10 plus petits nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.

Remarques

- Le nombre 1 n'est pas premier. En effet, il n'a qu'un seul diviseur qui est lui-même.
- La suite des nombre premiers est infinie. Sa régularité est encore étudiée par les chercheurs.

Propriétés

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Cette décomposition en facteurs premiers est à chaque fois unique.

Exemples

- | | |
|------------------------------|---|
| • $12 = 2 \times 2 \times 3$ | • $121 = 11 \times 11$ |
| • $70 = 2 \times 5 \times 7$ | • $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ |

Méthode

Pour savoir si un nombre est premier, on essaie de le diviser par les nombres premiers qui le précèdent, dans l'ordre croissant.

Déterminons si 821 est premier.

$$821 : 2 = 410,5$$

$$821 : 3 \approx 274$$

$$821 : 5 = 164,2$$

$$821 : 7 \approx 117$$

$$821 : 11 \approx 75$$

$$821 : 13 \approx 63$$

$$821 : 17 \approx 48$$

$$821 : 19 \approx 43$$

$$821 : 23 \approx 36$$

$$821 : 29 \approx 28$$

On sait désormais que 821 n'est pas divisible par un nombre inférieur ou égal à 29. Il sera donc impossible d'obtenir un quotient entier inférieur à 29. On vient de montrer que **821 est un nombre premier**.

03-02 Les nombres premiers**Définition**

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

Les 10 plus petits nombres premiers sont : _____

Remarques

- Le nombre 1 _____ premier. En effet, _____
- La suite des nombre premiers est _____. Sa régularité est encore étudiée par les chercheurs.

Propriétés

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Cette décomposition en facteurs premiers est à chaque fois unique.

Exemples

- | | |
|--|-----------------|
| • $12 = \dots \times \dots \times \dots$ | • $121 = \dots$ |
| • $70 = \dots \times \dots \times \dots$ | • $300 = \dots$ |

Méthode

Pour savoir si un nombre est premier, on essaie de le diviser par les nombres premiers qui le précèdent, dans l'ordre croissant.

Déterminons si 821 est premier.

$821 : 2 = \dots$
 $821 : 3 \approx \dots$
 $821 : 5 = \dots$
 $821 : 7 \approx \dots$
 $821 : 11 \approx \dots$
 $821 : 13 \approx \dots$
 $821 : 17 \approx \dots$
 $821 : 19 \approx \dots$
 $821 : 23 \approx \dots$
 $821 : 29 \approx \dots$

On sait désormais que 821 n'est pas divisible par un nombre inférieur ou égal à 29. Il sera donc impossible d'obtenir un quotient entier inférieur à _____. On vient de montrer que _____

03-03 Les fractions

Définitions et notation

Soit deux nombres entiers n et d (avec d différent de 0).

On appelle **fraction** $\frac{n}{d}$ le nombre par lequel il faut multiplier d pour obtenir n .

On dit que n est le **numérateur** de la fraction et d son **dénominateur**.

Exemple

Le nombre par lequel il faut multiplier 18 pour obtenir 55 est $\frac{55}{18}$.

Propriété

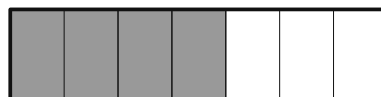
Qu'elle s'applique à un nombre ou à une figure géométrique, la fraction $\frac{n}{d}$ partage en d parts égales et prend n parts.

Exemples

- Pour prendre les trois quarts de 34, on divise 34 par 4 puis on multiplie par 3.

Cela s'écrit $\frac{3}{4} \times 34 = 25,5$.

- Les quatre septièmes du rectangle ci-contre sont coloriés.



Remarques

- Dans un calcul, le mot « de » se traduit par une multiplication.
- Pour prendre les trois quarts de 34, on pouvait commencer par multiplier 34 par 3 puis diviser par 4.
- Cas des pourcentages : une autre écriture de la fraction $\frac{37}{100}$ est 37 %.

Propriétés

Soit a un entier naturel non nul. On a alors les cas particuliers suivants :

$$\frac{a}{0} \text{ n'existe pas}$$

$$\frac{0}{a} = 0$$

$$\frac{a}{1} = a$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

03-03 Les fractions**Définitions et notation**

Soit deux nombres entiers n et d (avec d différent de 0).

On appelle **fraction** $\frac{n}{d}$ le nombre par lequel il faut multiplier d pour obtenir n .

On dit que n est le **numérateur** de la fraction et d son **dénominateur**.

Exemple

Le par lequel il faut multiplier pour obtenir est $\frac{55}{18}$.

Propriété

Qu'elle s'applique à un nombre ou à une figure géométrique, la fraction $\frac{n}{d}$ partage en d parts égales et prend n parts.

Exemples

- Pour prendre les trois quarts de 34, on divise par puis on par

Cela s'écrit

- Les quatre septièmes du rectangle ci-contre sont coloriés.

**Remarques**

- Dans un calcul, le mot « de » se traduit par une
- Pour prendre les trois quarts de 34, on pouvait commencer par multiplier 34 par 3 puis
- Cas des pourcentages : une autre écriture de la fraction $\frac{37}{100}$ est

Propriétés

Soit a un entier naturel non nul. On a alors les cas particuliers suivants :

$$\frac{a}{0} \text{ n'existe pas}$$

$$\frac{0}{a} = 0$$

$$\frac{a}{1} = a$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

03-04 Fractions égales

Propriété

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise simultanément son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

Exemples

- La fraction $\frac{6}{8}$ peut s'écrire $\frac{6 \times 7}{8 \times 7}$ c'est-à-dire $\frac{42}{56}$.
- La fraction $\frac{6}{8}$ peut s'écrire $\frac{6 : 2}{8 : 2}$ c'est-à-dire $\frac{3}{4}$.

Définitions

Simplifier (on dit aussi **réduire**) une fraction, c'est l'écrire avec les nombres les plus petits possibles. La fraction obtenue est dite **simplifiée** (on dit aussi **irréductible**).

Remarques

- Dans le cas de grands nombres, on est amené à simplifier une fraction en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned} \frac{10626}{14490} &= \frac{5313}{7245} \\ &= \frac{1771}{2415} \\ &= \frac{253}{345} \\ &= \frac{11}{15} \end{aligned}$$

- La décomposition en produit de facteurs premiers des éléments d'une fraction facilite la simplification :

$$\begin{aligned} \frac{10626}{14490} &= \frac{2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 23} \\ &= \frac{\mathbf{2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23}}{\mathbf{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 23}} \\ &= \frac{11}{15} \end{aligned}$$

- Pour trouver le nombre manquant dans une égalité de deux fractions, on peut utiliser le produit en croix :

Le nombre qui complète l'égalité $\frac{117}{279} = \frac{?}{527}$ est $\frac{117 \times 527}{279} = 221$.

03-04 Fractions égales**Propriété**

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise simultanément son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

Exemples

- La fraction $\frac{6}{8}$ peut s'écrire $\frac{6 \times 7}{8 \times 7}$ c'est-à-dire
- La fraction $\frac{6}{8}$ peut s'écrire $\frac{6:2}{8:2}$ c'est-à-dire

Définitions

Simplifier (on dit aussi **réduire**) une fraction, c'est l'écrire avec les nombres les plus petits possibles. La fraction obtenue est dite **simplifiée** (on dit aussi **irréductible**).

Remarques

- Dans le cas de grands nombres, on est amené à une fraction en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned} \frac{10626}{14490} &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

- La décomposition en produit de facteurs premiers des éléments d'une fraction facilite la simplification :

$$\begin{aligned} \frac{10626}{14490} &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

- Pour trouver le nombre manquant dans une égalité de deux fractions, on peut utiliser le produit en croix :

Le nombre qui complète l'égalité $\frac{117}{279} = \frac{?}{527}$ est

03-05 Comparaisons de fractions

Propriétés

Deux fractions ayant le même dénominateur ont le même ordre que leurs numérateurs.

Deux fractions ayant le même numérateur, ont l'ordre contraire de leurs dénominateurs.

Exemple

$$\frac{3}{7} < \frac{6}{7} \text{ mais } \frac{7}{3} > \frac{7}{6}$$

Méthode

Pour comparer deux fractions, on commence par les écrire avec le même dénominateur.

Exemple

On souhaite comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{9}{5}$. On a $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$ et $\frac{9}{5} = \frac{36}{20}$.

Comme $\frac{35}{20} < \frac{36}{20}$ alors on a $\frac{7}{4} < \frac{9}{5}$.

Propriété

Soient deux entiers a et b avec b non nul. On a $\frac{a}{b} < 1$ si et seulement si $a < b$.

Définitions

Le quotient de 11 par 4 peut s'écrire sous forme :

- **fractionnaire** : $\frac{11}{4}$
- **décimale** : 2,75
- **mixte** : $2 + \frac{3}{4}$

Remarque

L'écriture mixte est la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Les Américains, qui qualifient **d'impropres** les fractions supérieures à 1, utilisent la notation $2 \frac{3}{4}$.

03-05 Comparaisons de fractions**Propriétés**

Deux fractions ayant le même dénominateur ont le même ordre que leurs numérateurs.

Deux fractions ayant le même numérateur, ont l'ordre contraire de leurs dénominateurs.

Exemple

$$\frac{3}{7} < \frac{6}{7} \text{ mais } \dots\dots\dots$$

Méthode

Pour comparer deux fractions, on commence par les écrire avec le $\dots\dots\dots$

Exemple

On souhaite comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{9}{5}$. On a $\frac{7}{4} = \dots\dots$ et $\frac{9}{5} = \dots\dots$

Comme $\dots\dots < \dots\dots$ alors $\dots\dots < \dots\dots$

Propriété

Soient deux entiers a et b avec b non nul. On a $\frac{a}{b} < 1$ si et seulement si $a < b$.

Définitions

Le quotient de 11 par 4 peut s'écrire sous forme :

- **fractionnaire** : $\dots\dots\dots$
- **décimale** : $\dots\dots\dots$
- **mixte** : $2 + \frac{3}{4}$

Remarque

L'écriture mixte est la somme d'un $\dots\dots\dots$ et d'une fraction $\dots\dots\dots$

Les Américains, qui qualifient **d'impropres** les fractions $\dots\dots\dots$ à 1, utilisent la notation $2\frac{3}{4}$.

03-06 Opérations avec des fractions**Propriété**

Pour ajouter deux fractions qui ont le même dénominateur, on ajoute leurs numérateurs en gardant le même dénominateur.

Autrement dit : si a , b et c sont des entiers naturels (avec c non nul) alors $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Exemple

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

Remarques

- De même, pour la soustraction on a $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
- Ces propriétés sont intuitives si l'on passe par le français : ainsi, huit tiers et cinq tiers font treize tiers.
- Quand les dénominateurs sont différents, on les rend identiques en modifiant l'écriture des fractions.

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{1}{6} + \frac{10}{6} \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 - \frac{2}{5} &= \frac{35}{5} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{33}{5} \end{aligned}$$

Propriété

On multiplie un nombre entier par une fraction en multipliant uniquement le numérateur.

Exemples

$$3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{7}{3} \times 33 = 77$$

Remarque

On utilise cette propriété pour calculer les fractions de grandeurs.

Ainsi, les trois quarts de 220m font $\frac{3}{4} \times 220 = 165$ m.

03-06 Opérations avec des fractions**Propriété**

Pour ajouter deux fractions qui ont le même dénominateur, on ajoute leurs numérateurs en gardant le même dénominateur.

Autrement dit : si a , b et c sont des entiers naturels (avec c non nul) alors $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Exemple

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \dots\dots\dots$$

Remarques

- De même, pour la soustraction on a $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \dots\dots\dots$
- Ces propriétés sont intuitives si l'on passe par le français : ainsi, huit tiers et cinq tiers font $\dots\dots\dots$
- Quand les $\dots\dots\dots$ sont différents, on les rend identiques en modifiant l'écriture des fractions.

Exemples

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{1}{6} + \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$7 - \frac{2}{5} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Propriété

On multiplie un nombre entier par une fraction en multipliant uniquement le numérateur.

Exemples

$$3 \times \frac{5}{2} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{7}{3} \times 33 = \dots\dots\dots$$

Remarque

On utilise cette propriété pour calculer les fractions de grandeurs.

Ainsi, les trois quarts de 220m font $\dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots\dots$

Écritures d'une fraction

Forme fractionnaire	Forme décimale (arrondi éventuel à l'unité)	Forme mixte (+)	Forme mixte (-)

Écritures d'une fraction

Forme fractionnaire	Forme décimale (arrondi éventuel à l'unité)	Forme mixte (+)	Forme mixte (-)

--	--	--	--